§ 3. Бөліктеп интегралдау

Теорема. $u(x), v(x)$ функциялары $< a, b >$ аралығында дифференциалдансын және осы аралықта $u'(x)v(x)$ функциясының алғашқы бейнесі бар болсын. Онда $< a, b >$ аралығында $u(x)v'(x)$ функциясының да алғашқы бейнесі бар болады, әрі $\int udv = uv - \int vdu + C$ орындалады. $\int udv$ табу үшін *бөліктеп интегралдау* әдісін қолданады, интеграл астындағы өрнекті екі көбейткішке бөлеміз, біреуі - $u(x)$, екіншісі- $dv(x)$. Бірінші көбейткіштің дифференциалын $du(x)$, екінші көбейткіштің $dv(x)$ белгілі дифференциалы арқылы $v(x)$ табамыз. Содан соң $\int vdu$

табамыз.

Бөліктеп интегралдау әдісі келесі жағдайларда қолданылады:

I. Интеграл астындағы функциялар әртүрлі атаулы функциялардың көбейтіндісі, мысалы, дәрежелік пен тригонометриялық, дәрежелік пен көрсеткіштік, логарифмдік пен тригонометриялық, т.с.с.
II. Интеграл астындағы функцияның құрамында негізгі интегралдық кестеде жоқ элементар функциялар бар болса, мысалы, $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $arcctgx$,.... Осындай интегралдарда дәл осы функцияларды $u(x)$ ретінде алу керек.

Айталық, $\int (3x-1)\cos 2x\,dx$ интегралын табу керек. Интеграл астындағы өрнекте төмендегідей тривиалды емес бөліктеулер болуы мүмкін:

1. $u = (3x-1)\cos 2x,\ dv = dx$
2. $u = \cos 3x,\ \ dv = (3x-1)\,dx$
3. $u = (3x-1),\ dv = \cos 2x\,dx$

$u(x)$ -ті дифференциалдау керек, онда бірінші жағдайда бір интегралдың орнына екеу аламыз, әрі оның бірі берілген интегралға ұқсас, тек косинустың орнында синус отырады. Екінші жағдайда $dv = (3x-1)\,dx$ интегралдау берілген интегралды қиындатады, көпмүшеліктің дәрежесі өседі, ал, $u(x)$-ті дифференциалдау тек косинусты синусқа ауыстырады. Үшінші жағдайда көпмүшелікті дифференциалдау дәрежені төмендетеді, косинусты интегралдау оны синусқа ауыстырады, демек, осы жағдайда қарапайым интеграл аламыз.

Сонымен:

$$\int (3x-1)\cos 2x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = 3x-1,\ du = 3\,dx,\ \ dv = \cos 2x dx, \\ v = \int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}(3x-1)\sin 2x - \frac{3}{2}\int \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}(3x-1)\sin 2x + \frac{3}{4}\cos 2x + C.$$

Мысал 1. $\int x \sin x dx =$

интеграл астындағы функция дәрежелік пен тригонометриялық функциялардың көбейтіндісі, сондықтан бөліктеп интегралдаймыз; әр функция - кестелік; $u(x)$ ретінде дәрежелік функцияны алу керек:

$$= \left| \begin{array}{l} u = x,\ dv = \sin x dx \\ du = dx,\ v = -\cos x \end{array} \right| = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C$$

Мысал 2. $\int arctgx dx =$

интеграл астындағы функция – кері тригонометриялық; кестелік емес, сондықтан бөліктеп интегралдаймыз:

$$= \left| \begin{array}{ll} u = arctgx & dv = dx \\ du = \dfrac{1}{1+x^2} & v = x \end{array} \right| = x\ arctg\,x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x\ arctg\,x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x\ arctg\,x + \ln(1+x^2) + C.$$

Мысал 3. $\int \frac{\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx =$

интеграл астындағы функцияның анықталу облысы – $(-1;1)$ интервалы; интеграл астындағы функция - әртүрлі атаулы функциялардың көбейтіндісі, біреуі кестелік емес ($\arccos x$), сондықтан бөліктеп интегралдаймыз; бұл мысалда алдын-ала айнымалыны алмастырсақ, интегралдау процесі жылдамдайды:

$$= \left| \begin{array}{l} \quad t = \arccos x \\ x = \cos t : (0;\pi) \to (-1;1) \\ dx = -\sin t dt \end{array} \right| = -\int \frac{t \sin t dt}{(1-\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} =$$

$t \in (0;\pi)$ интервалда $sint > 0$, сондықтан $|sint| = sint$:

$$= \int \frac{t}{sin^2 t} dt =$$

енді бөліктеп интегралдаймыз:

$$= \left| \begin{array}{ll} u = t & dv = -\frac{dt}{sin^2 t} \\ du = dt & v = ctgt \end{array} \right| =$$

$$= tctgt - \int ctgtdt = tctgt - \int \frac{cost}{sint} dt = t\frac{cost}{sint} - lnsint + C =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} arccosx - ln\sqrt{1-x^2} + C.$$

Мысал 4. $I = \int e^{ax} \cos bx dx =$

интеграл астындағы функция көрсеткіштік және тригонометриялық функциялардың көбейтіндісі, сондықтан бөліктеп интегралдаймыз; әр функция - кестелік; $u(x)$ ретінде кез келген функцияны алуға болады, мысалы, тригонометриялық функцияны алсақ:

$$\left| \begin{array}{l} u = \cos bx, du = -b \sin bx dx \\ dv = e^{ax} dx, v = \frac{1}{a} e^{ax} \end{array} \right| = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx dx =$$

Соңғы интегралды да бөліктеп интегралдаймыз. $u(x)$ ретінде тағы да тригонометриялық функцияны аламыз.

$$=\begin{vmatrix} u=\sin bx, du=b\cos bx \\ dv=e^{ax}dx, v=\frac{1}{a}e^{ax} \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a^2}\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{a\ \cos bx+b\sin bx}{a^2}-\frac{b^2}{a^2}I.$$

Осы табылған теңдіктен $I=\frac{a\cos bx+b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}+C.$

Мысал 5. $I=\int e^{2x}\cos 3x\,dx=$

Алдыңғы мысалда $u(x)$ ретінде тригонометриялық функцияны алғанбыз. Енді $u(x)$ ретінде көрсеткіштік функцияны алсақ:

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx=$$

$$=\begin{vmatrix} u=e^{2x},\ du=2e^{2x}\,dx,\ dv=\cos 3x\,dx, \\ v=\int\cos 3x\,dx=\frac{1}{3}\sin 3x \end{vmatrix}=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x-\frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3x\,dx=$$

Соңғы интегралды да бөліктеп интегралдаймыз. $u(x)$ ретінде тағы да көрсеткіштік функцияны аламыз. Кері жағдайда бастапқы интегралға ораламыз.

$$=\begin{vmatrix} u=e^{2x},\ du=2e^{2x}\,dx,\ dv=\sin 3x\,dx, \\ v=\int\sin 3x\,dx=-\frac{1}{3}\cos 3x \end{vmatrix}=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x+\frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x\,dx\right)$$

Теңдіктің оң жағында берілген интеграл шықты. Жақшаларды ашып, теңдікті қайта жазсақ:

$$I=\frac{1}{3}e^{2x}\left(\sin 3x+\frac{2}{3}\cos 3x\right)-\frac{4}{9}I\,,$$

I-ге қатысты теңдеуді шешеміз:

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx=\frac{3}{13}e^{2x}\left(\sin 3x+\frac{2}{3}\cos 3x\right)+C.$$

Қорытынды. Интеграл астындағы өрнек көрсеткіштік пен тригонометриялық функциялардың көбейтіндісі болып кездессе, $u(x)$ ретінде кез келген функцияны алуға болады. Бөліктеп интегралдау әдісін екінші рет қолданғанда $u(x)$ ретінде бастапқы атаулы функцияны алу керек.

Мысал 6. $\int \frac{3x+5}{\cos^2 2x}dx =$

Екімүшелікті дифференциалдасақ дәрежесі төмендейді, ал $\cos^{-2} x$-ң интегралы кестелік:

$$= \left| \begin{array}{l} u = 3x+5,\ du = 3dx,\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 2x} \\ v = \int \dfrac{dx}{\cos^2 2x} = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg} 2x \end{array} \right| = \frac{1}{2}(3x+5)\operatorname{tg} 2x - \frac{3}{2}\int \operatorname{tg} 2x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}(3x+5)\operatorname{tg} 2x + \frac{3}{4}\ln|\cos 2x| + C$$

Мысал 7. $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}dx =$

$$= \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{a^2-x^2}, dv = dx \\ du = -\dfrac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}dx, v = x \end{array} \right| = x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{x^2 - a^2 + a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}dx +$$

$$+ a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = x\sqrt{a^2-x^2} - I + \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Осы табылған теңдіктен $I = \int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$

Келешекте аса маңызды рөлі бар

$$K_\lambda = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^\lambda} \quad (a = const,\ \ \lambda = 1{,}2.......)$$

интегралын табайық. Бұл интеграл да жоғарыдағы топтарға енбейді. Алдымен K_λ интегралын былай жазып алайық:

$$K_\lambda = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2 dt}{\left(t^2+a^2\right)^\lambda} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\left[\left(t^2+a^2\right)-t^2\right]dt}{\left(t^2+a^2\right)^\lambda} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{\lambda-1}} - \frac{1}{2a^2}\int t\frac{2tdt}{\left(t^2+a^2\right)^\lambda} =$$

$$= \frac{1}{a^2}K_{\lambda-1} - \frac{1}{2a^2}\int t\frac{d\left(t^2+a^2\right)}{\left(t^2+a^2\right)^\lambda} = \left| \begin{array}{l} u=t,\ du=dt \\ dv = \dfrac{d\left(t^2+a^2\right)}{\left(t^2+a^2\right)^\lambda},\ v = -\dfrac{1}{(\lambda-1)\left(t^2+a^2\right)^{\lambda-1}} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{a^2}K_{\lambda-1} + \frac{t}{2a^2(\lambda-1)\left(t^2+a^2\right)^{\lambda-1}} - \frac{1}{2a^2(\lambda-1)}K_{\lambda-1}$$

рекуренттік формуласын аламыз. Ал,

$$K_1 = \int\frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{\left(\frac{t}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}+C$$

екенін ескеріп, рекуренттік формуладан $K_2, K_3,......$ таба береміз.

Ескерту. 4 және 5 мысалдарда қарастырылған интегралдарды ***циклдік*** деп атайды.

§ 4. Рационал функцияларды интегралдау

Рационал функция (немесе ***рационал бөлшек)*** деп екі алгебралық көпмүшеліктердің қатынасын айтамыз:

$$R(x) = \frac{P_k(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_kx^k}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n},$$

$$k,n \in \mathrm{N} \cup \{0\}, \quad a_i \in \Re, \quad i = 0,...,k;$$

$$b_j \in \Re, \quad j = 0,...,n; \quad a_k \neq 0, \quad b_n \neq 0.$$

Рационал бөлшек ***дұрыс*** деп аталады, егер $k < n;$ егер $k \geq n$ бөлшек ***бұрыс*** деп аталады. Бұрыс бөлшекті интегралдау үшін бұрыштап бөлу арқылы дұрыс бөлшекке келтіреміз. Дұрыс рационал функцияны интегралдау үшін жай бөлшектердің қосындысына жіктейміз. Жай бөлшектердің төмендегідей типтері бар:

$$I.\ \frac{A}{x-a}, \qquad II.\ \frac{B}{(x-a)^k}, \qquad III.\ \frac{Cx+D}{x^2+px+q}, \qquad IV.\ \frac{Ex+F}{(x^2+px+q)^l},$$

мұнда A, B, C, D, E, F -- тұрақтылар.

Жалпы жағдайда m-ретті көпмүшелік

$$Q_m(x) = A_m(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k)^k\cdots(x^2+p_hx+q_h)\cdots\left(x^2+p_lx+q_l\right)^l\cdots$$

типті көбейткіштерге жіктеледі.

Дұрыс рационал $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ функцияны төмендегі тәртіппен жай бөлшектердің қосындысына жіктейміз:

1. Бөлшектің бөліміндегі көпмүшеліктің түбірлерін $Q_m(x)=0$ теңдеуін шешу арқылы табамыз.

2. Көпмүшелікті табылған түбірлердің көмегімен
$$Q_m(x) = A_m(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k)^k\cdots(x^2+p_hx+q_h)\cdots\left(x^2+p_lx+q_l\right)^l\cdots$$
көбейткіштерге жіктейміз.

3. Көбейткіштерге жай бөлшектерді сәйкес қоямыз:

I. *Нақты бір еселі* түбірге сәйкес: $(x-x_i)\Rightarrow\dfrac{A_i}{x-x_i}$,

II. *Нақты k еселі* түбірге k бөлшектің қосындысы сәйкес:

$$(x-x_k)^k \Rightarrow \frac{B_1}{x-x_k}+\frac{B_2}{(x-x_k)^2}+....+\frac{B_k}{(x-x_k)^k},$$

III. *Бір еселі өзара түйіндес комплекс* түбірдің жұбына сәйкес:

$$x^2+p_hx+q_h \Rightarrow \frac{C_h\,x+D_h}{x^2+p_hx+q_h},$$

IV. *l еселі өзара түйіндес комплекс* түбірдің жұбына l бөлшектің қосындысы сәйкес:

$$\left(x^2+p_lx+q_l\right)^l \Rightarrow \frac{E_1\,x+F_1}{x^2+p_lx+q_l}+\frac{E_2\,x+F_2}{\left(x^2+p_lx+q_l\right)^2}+...+\frac{E_l\,x+F_l}{\left(x^2+p_lx+q_l\right)^l}$$

4. Барлық енгізілген жай бөлшектердің қосындысын берілген рационал функцияға теңестіреміз:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \ldots + \frac{A_i}{x-x_i} + \ldots + \frac{B_1}{x-x_k} + \frac{B_2}{(x-x_k)^2} + \ldots. + \frac{B_k}{(x-x_k)^k} +$$

$$\ldots. + \frac{C_h\, x + D_h}{x^2 + p_h x + q_h} + \ldots + \frac{E_1\, x + F_1}{x^2 + p_l x + q_l} + \frac{E_2\, x + F_2}{(x^2 + p_l x + q_l)^2} + \ldots + \frac{E_l\, x + F_l}{(x^2 + p_l x + q_l)^l} + \ldots$$

5. Тұрақтыларды табу үшін теңдікті ортақ бөлімге келтіреміз. Алымды теңестіру үшін төмендегі тұжырымдарды ұстанамыз:

1) егер көпмүшеліктер тең болса, онда айнымалының орнына белгілі санды қойғанда мәндері тең болу керек;

2) егер көпмүшеліктер тең болса, x-тің бірдей дәрежелерінің алдындағы коэффициенттері тең болу керек.

6. Табылған жай бөлшектердің қосындысын интегралдаймыз.

I, II типті жай рационал бөлшектерді интегралдасақ:

$$\int (x-a)^{-\lambda} dx = \begin{cases} \frac{1}{-\lambda+1}(x-a)^{-\lambda+1} + C, & \lambda \neq 1 \\ \ln|x-a| + C, & \lambda = 1 \end{cases}$$

III, IV типті жай рационал бөлшектерді интегралдасақ:

$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^\lambda} dx$ интегралын есептеу үшін $x^2 + px + q$ көпмүшелігін $(x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4})$ түрінде (мұндағы $q - \frac{p^2}{4} > 0$) жазамыз. Сонан соң $x + \frac{p}{2} = u, \quad q - \frac{p^2}{4} = a^2$ деп белгілесек,

$$\int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^\lambda} dx = \int \frac{Bu + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)}{(u^2 + a^2)^\lambda} du =$$

$$= B \int \frac{udu}{(u^2 + a^2)^\lambda} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \int \frac{du}{(u^2 + a^2)^\lambda} =$$

$$= \frac{B}{2} \int \frac{d(u^2 + a^2)}{(u^2 + a^2)^\lambda} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) K_\lambda =$$

$$= \frac{B}{2(1-\lambda)}(u^2+a^2)^{-\lambda+1} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)K_\lambda, \qquad \boldsymbol{\lambda \neq 1}$$

Егер $\lambda = 1$ болса, онда $\int \frac{d(u^2+a^2)}{(u^2+a^2)} = \ln(u^2+a^2) + C,$

$$K_1 = \int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{du}{1+\left(\frac{u}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{u}{a}\right)}{1+\left(\frac{u}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} arctg\ \frac{u}{a} + C.$$

K_λ интегралы 7-мысалда реккуренттік формула арқылы табылған.

Мысал 1. Интегралды табыңыз. $\int \frac{2x^4 - 2x^2 + 1}{x^3 - 2x^2 - 3x}dx.$

Шешуі. Бөлшек бұрыс. Бұрыштап бөліп, бүтін бөлігін айырып аламыз:

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 2x^2 + 1 & x^3 - 2x^2 - 3x \\ \cline{2-2} -\ 2x^4 - 4x^3 - 6x^2 & 2x + 4 \\ \cline{1-1} 4x^3 + 4x^2 + 1 & \\ -\ 4x^3 - 8x^2 - 12x & \\ \cline{1-1} 12x^2 + 12x + 1 & \end{array}$$

Ендеше, $\frac{2x^4 - 2x^2 + 1}{x^3 - 2x^2 - 3x} = 2x + 4 + \frac{12x^2 + 12x + 1}{x^3 - 2x^2 - 3x}$. Орнына апарып қойсақ:

$$\int \frac{2x^4 - 2x^2 + 1}{x^3 - 2x^2 - 3x}dx = x^2 + 4x + \int \frac{12x^2 + 12x + 1}{x^3 - 2x^2 - 3x}dx =$$

Бөлімдегі көпмүшеліктің түбірлерін табамыз және оны көбейткіштерге жіктейміз :

$$x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \ \Rightarrow \ x\left(x^2 - 2x - 3\right) = 0 \ \Rightarrow \ x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = 3.$$

Барлық түбірлер жай, нақты. Жіктеудің түрі:

$x^3-2x^2-3x=x(x+1)(x-3).$

Дұрыс рационал бөлшекті жай бөлшектердің қосындысына жіктейміз, қосындыны ортақ бөлімге келтіреміз:

$$\frac{12x^2+12x+1}{x^3-2x^2-3x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-3}=\frac{A(x+1)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x+1)}{x^3-2x^2-3x}$$

Алымдағы көпмүшеліктерде айнымалының орнына түбірлерін қойып, мәндерін салыстыра отырып, коэффициенттерді анықтаймыз:

$$x=0\;\Rightarrow\;1=-3A\;\Rightarrow\;A=-\frac{1}{3};$$

$$x=-1\;\Rightarrow\;1=4B\;\Rightarrow\;B=\frac{1}{4};$$

$$x=3\;\Rightarrow\;145=12C\;\Rightarrow\;C=\frac{12}{145};$$

Жай бөлшектердің қосындысын интегралға қойып және интегралдасақ:

$$\int\frac{2x^4-2x^2+1}{x^3-2x^2-3x}dx=x^2+4x+\int\left(-\frac{1/3}{x}+\frac{1/4}{x+1}+\frac{12/145}{x-3}\right)dx=$$

$$=x^2+4x-\frac{1}{3}\ln x+\frac{1}{4}\ln(x+1)+\frac{12}{145}\ln(x-3)+C=$$

$$=x^2+4x+\ln\frac{(x+1)^{1/4}(x-3)^{12/145}}{x^{1/3}}+C.$$

Мысал 2. Интегралды табыңыз. $\displaystyle\int\frac{3x^2-2x+2}{(x+2)^2(x^2-2x+10)}dx$.

Шешуі. Бұл жағдайда дұрыс бөлшек берілген. $(x+2)^2(x^2-2x+10)=0$ теңдеуін шешсек: нақты түбірі $x=-2,$ 2 еселі; ал, квадрат үшмүшелікке б*ір еселі өзара түйіндес комплекс* түбірдің жұбы сәйкес. Интеграл астындағы функцияның жай бөлшектердің қосындысына жіктелу түрі:

$$\frac{3x^2-2x+2}{(x+2)^2(x^2-2x+10)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{Cx+D}{x^2-2x+10}=$$

$$=\frac{A(x+2)(x^2-2x+10)+B(x^2-2x+10)+(Cx+D)(x+2)^2}{(x+2)^2(x^2-2x+10)}.$$

Бір ғана нақты түбірі болғандықтан:

$x = -2 \Rightarrow 18 = 18B \ \Rightarrow \ B = 1.$

Басқа коэффициенттерді анықтау үшін x айнымалының бірдей дәрежелерінің коэффициенттерін теңестіру арқылы теңдеулер жүйесін құрамыз:

$x^3 \Rightarrow 0 = A + C$

$x^2 \Rightarrow 3 = B + 4C + D$

$x \ \Rightarrow -2 = 6A - 2B + 4C + 4D,$

немесе

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ 4C + D = 2 \\ 6A + 4C + 4D = 0 \end{cases}.$$

Жүйенің шешімі: $A = -\frac{4}{9}, \ C = \frac{4}{9}, \ \ D = \frac{2}{9}.$

Осылайша,

$$\frac{3x^2 - 2x + 1}{(x+2)^2(x^2 - 2x + 10)} = -\frac{1}{9}\left(\frac{4}{x+2} - \frac{9}{(x+2)^2} - \frac{4x+2}{x^2 - 2x + 10}\right)$$

Интегралға қойсақ:

$$\int \frac{3x^2 - 2x + 1}{(x+2)^2(x^2 - 2x + 10)} dx = -\frac{4}{9}\int \frac{dx}{x+2} + \int \frac{dx}{(x+2)^2} + \frac{2}{9}\int \frac{2x+1}{x^2 - 2x + 10} dx$$

Табамыз:

$$\int \frac{dx}{x+2} = \ln|x+2| + C,$$

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2} = \int (x+2)^{-2} \, dx = -\frac{1}{x+2} + C,$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2-2x+10}dx = \left| \begin{matrix} x^2-2x+10=(x-1)^2+3^2 \\ t=x-1,\ x=t+1,\ dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{2t+3}{t^2+3^2}dt =$$

$$= \int \frac{d\left(t^2+3\right)}{t^2+3^2} + 3\int \frac{dt}{t^2+3^2} = \ln\left(t^2+3\right) + \operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C = \left|t=x-1\right| =$$

$$= \ln\left((x-1)^2+3\right) + \operatorname{arctg}\frac{x-1}{3} + C.$$

Қорытындысында:

$$\int \frac{3x^2-2x+1}{(x+2)^2\left(x^2-2x+10\right)}dx = -\frac{4}{9}\ln|x+2| - \frac{1}{x+2} + \frac{2}{9}\ln\left((x-1)^2+3\right) + \operatorname{arctg}\frac{x-1}{3} + C,$$

немесе:

$$\int \frac{3x^2-2x+1}{(x+2)^2\left(x^2-2x+10\right)}dx = \frac{2}{9}\ln\frac{(x-1)^2+3}{(x+2)^2} - \frac{1}{x+2} + \operatorname{arctg}\frac{x-1}{3} + C$$

Осылай дұрыс рационал бөлшекті жіктеу әдісін *белгісіз коэффициенттерді анықтау* әдісі деп те атайды.

$$\frac{\boldsymbol{P(x)}}{\boldsymbol{Q(x)}} = \frac{\boldsymbol{A_1}}{(\boldsymbol{x-a_1})} + \cdots \frac{\boldsymbol{A_n}}{(\boldsymbol{x-a_n})}.$$

Осыдан A_k еселеуішін табу үшін $(x-a_k)$ жақшасын сызып тастап, қалған өрнекке $x=a_k$ деп қоямыз.

Теорема*. Кез келген рационал бөлшектің алғашқы функциясы бар және ол алғашқы функция элементар функциялар арқылы өрнектеледі.*

Мысал 3.

$$\int \frac{3x^4+2x^3+3x^2-1}{(x-2)(x^2+1)^2} = \int \frac{3}{x-2}dx + 2\int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx =$$

$$= 3\ln(x-2) + 2arctgx + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = 3\ln(x-2) + 2arctgx = \frac{1}{2(x^2+1)} + C$$

(*коэффициентті анықтаудың* ***алақан әдісі)*** $\frac{x+1}{(x-1)(x^2-2x)}$ бөлшегінің жіктеуін табайық.

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)x} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x}$$

деп жазып, А – ны табу үшін $\frac{\mathrm{x}+1}{\mathrm{x}(\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}-2)}$ бөлшегінде $(x-1)$ жақшасын сызып тастаймыз, сонда $\frac{x+1}{x(x-2)}$ қалады, енді осыған $x = 1$ деп қойсақ, $A = -2$. Дәл осылай B табу үшін $\frac{x+1}{x(x-1)(x-2)}$ $-$ден $(x-2)$ ні сызып тастап, одан шыққан $\frac{x+1}{x(x-1)}$ $-$ге $x = 2$ десек, $B = \frac{3}{2}$. С – ні табу үшін берілген рационал бөлшекті x ке қысқартып, қалған $\frac{x+1}{(x-1)(x-2)}$ өрнегінде $x = 0$ десек, С – ні табамыз, $C = \frac{1}{2}$.